

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# **ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ**

## **РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітніми програмами  
«Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної інформації»,  
«Електронні системи мультимедіа та засоби Інтернету речей»,  
«Електронні компоненти і системи» та «Електронні прилади та пристрої»  
спеціальності 171 Електроніка*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 13.05.2021 р.)*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2021

Основи аналітичної механіки та теорії коливань: розрахунково-графічна робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. С. Дідковський, О. В. Гармаш, К. С. Дрозденко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,35 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 57 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 13.05.2021 р.)  
за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол №04/21 від 26.04.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

# **ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА**

Укладачі: *Дідковський Віталій Семенович, д-р техн. наук, проф.  
Гармаш Оксана Вікторівна, канд. техн. наук  
Дрозденко Катерина Сергіївна, канд. техн. наук*

Відповідальний  
редактор *Найда С. А., д-р техн. наук, проф.*

Рецензент: *Ямненко Ю.С., д-р. техн. наук, проф., завідувач кафедри  
електронних пристроїв та систем КПІ ім. Ігоря Сікорського*

При підготовці бакалаврів за спеціальністю 171 «Електроніка», освітніми програмами «Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної інформації», «Електронні системи мультимедіа та засоби Інтернету речей» «Електронні компоненти і системи» та «Електронні прилади та пристрої» однією з нормативних дисциплін циклу професійної підготовки є «Основи аналітичної механіки та теорії коливань».

Індивідуальним семестровим завданням даного курсу є розрахунково-графічна робота. Її мета – отримання студентами навичок розв'язання задач, використовуючи теорему про зміну кінетичної енергії, принцип Д'Аламбера та рівняння Лагранжа 2 роду.

Задачі, запропоновані для виконання в розрахунково-графічній роботі, повинні допомогти студенту в розумінні основних принципів механіки, оволодінні термінологією, основними положеннями розділу "Основи аналітичної механіки", надати досвід у вирішенні завдань, які зможуть бути корисними в процесі навчання, у практичній діяльності та наукових дослідженнях за фахом.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Загальні вимоги до виконання розрахунково-графічної роботи .....	5
1.1.Завдання на розрахунково-графічну роботу.....	5
1.2.Склад, структура та обсяг пояснювальної записки до розрахунково- графічної роботи.....	5
1.3.Вимоги до оформлення розрахунково-графічної роботи.....	6
2. Основні теоретичні відомості до виконання розділів розрахунково- графічної роботи.....	8
2.1.Загальні вимоги .....	8
2.2. Кінетична енергія системи матеріальних точок .....	8
2.2.1. Теоретичні відомості.....	8
2.2.2. Порядок розв'язування завдань .....	10
2.2.3. Приклади розв'язування завдань.....	11
2.3.Принцип Д'Аламбера.....	11
2.3.1. Теоретичні відомості.....	15
2.3.2. Порядок розв'язування завдань .....	17
2.3.3. Приклади розв'язування завдань.....	17
2.4.Рівняння Лагранжа 2 роду .....	19
2.4.1. Теоретичні відомості.....	19
2.4.2. Порядок розв'язування завдання.....	22
2.4.3. Приклади розв'язування задач .....	22
Рекомендована література .....	27
Додатки .....	28
Додаток 1 Варіанти завдання.....	29
Додаток 2 Титульний аркуш роботи .....	57

## ВСТУП

Розрахунково-графічна робота (РГР) з дисципліни "Основи аналітичної механіки та теорії коливань" – це індивідуальні завдання, що полягають у самостійному розв'язанні студентом певних практичних задач на основі засвоєного теоретичного матеріалу.

У навчальному посібнику наведено матеріал, що дозволяє:

- а) закріпити і поглибити теоретичні знання про основні закони механіки;
- б) допомогти в опануванні математичних основ методів розрахунку, які вивчаються в курсі вищої математики;
- в) отримати досвід застосування основних методів розрахунку характеристик руху системи тіл за індивідуальним завданням, самостійного розрахунку фізичних величин з використанням сучасних методик розрахунку, програмних та технічних засобів тощо.
- в) підвищити якість змісту та оформлення РГР.

Навчальний посібник складається з двох розділів, додатків та списку рекомендованої літератури для успішного виконання РГР.

У першому розділі наведені завдання, а також загальні рекомендації щодо змісту та оформлення РГР. У другому розділі викладені основні теоретичні відомості стосовно застосування теореми про зміну кінетичної енергії, принципу Д'Аламбера та рівняння Лагранжа 2 роду для розрахунку кінематичних характеристик руху системи тіл. У додатках наведені індивідуальні варіанти завдання на РГР, зразки оформлення титульного аркушу пояснювальної записки.

Після виконання РГР студенти мають продемонструвати такі результати:

- 1) знати основні поняття та визначення прикладної механіки; основні методи розв'язку задач кінетики та аналітичної механіки;
- 2) вміти обчислювати основні характеристики руху механічних систем;
- 3) набути навичок вирішення типових прикладних задач акустики.

# **1. ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ**

## **1.1. Завдання на розрахунково-графічну роботу**

1. Отримати у викладача індивідуальний варіант завдання (Додаток Д.1).
2. Вивчити основні теоретичні відомості.
3. Розв'язати задачу, використовуючи принцип Д'Аламбера.
5. Розв'язати задачу, використовуючи рівняння Лагранжа 2 роду.
6. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.
7. Оформити РГР та здати на перевірку.

## **1.2. Склад, структура та обсяг пояснювальної записки до розрахунково-графічної роботи**

Результати виконання РГР оформлюються студентами у вигляді пояснювальної записки.

Пояснювальна записка має наступну структуру.

1. Титульний аркуш (Додаток Д.2).
2. Завдання на РГР (індивідуальне завдання отримане у викладача).
3. Розрахункова частина.
4. Висновки.
5. Література.

Розрахункова частина містить необхідні розрахунки і графіки відповідно до завдання на РГР та аналіз отриманих результатів.

Розрахункова частина має наступні розділи.

1. Постановка задачі.
2. Розрахунок прискорення тіла на основі теореми про зміну кінетичної енергії.

3. Розрахунок прискорення тіла на основі принципу Д'Аламбера.
4. Розрахунок прискорення тіла на основі рівняння Лагранжа II роду.

У висновках (окрема сторінка) в стислій формі наводяться конкретні результати, що отримані у відповідних розділах розрахункової частини, та їх змістовний аналіз.

Орієнтовний обсяг пояснювальної записки складає 9...12 сторінок друкованого тексту.

### **1.3. Вимоги до оформлення розрахунково-графічної роботи**

Пояснювальна записка оформлюється українською мовою з використанням відповідних термінів [1] та додержанням правил правопису [2].

Пояснювальна записка має бути виконана згідно з чинним стандартом ДСТУ 3008-95 [3]. До захисту пояснювальна записка подається в зброшурованому вигляді.

Обсяг записки становить 9...12 друкованих пронумерованих сторінок. Сторінки нумерують, починаючи з другої (перша сторінка – титульний аркуш), по центру нижнього поля аркушу.

Текст роботи оформлюють в друкованому вигляді на аркушах формату А4, шрифтом Times New Roman, 14 пт, міжрядковий інтервал 1,5 lines, береги: верхній, лівий і нижній – не менше 20 мм, правий – не менше 10 мм.

Пояснювальну записку курсової роботи розбивають на розділи та підрозділи, за необхідністю – на пункти та підпункти. Розділи в роботі повинні мати порядкові номери (арабські цифри з крапкою). Підрозділи повинні нумеруватись в межах розділу; номер підрозділу складається з номерів розділу і підрозділу, відокремлених крапкою, наприклад: 4.1.

Заголовки розділів розташовують посередині рядка та друкують великими літерами без крапки в кінці. Заголовки підрозділів та пунктів

друкують малими літерами, крім першої великої, без крапки в кінці. Перенесення слів у заголовках не допускається.

У тексті не дозволяються скорочення слів, за винятком загальноприйнятих. Необхідно давати розшифровку позначень у формулах.

Усі рисунки, таблиці та формули нумерують арабськими цифрами з порядковою нумерацією в межах розділу. Нумерація складається з номера розділу і порядкового номера рисунка, таблиці або формули, відокремлених крапкою (наприклад: 3.2. – другий рисунок третього розділу). Рисунок може мати назву. Номер і назву рисунку розміщують під рисунком: Рис. 3.2. Назва.

Графіки повинні містити найменування осей та значення величин на них.

На всі рисунки та таблиці, наведені в розділі, мають бути посилання в текстовій частині. Посилання на рисунки та таблиці мають вигляд “рис. 3.1”, “В табл. 1.1 наведено...”.

Перелік посилань повинен складатись з переліку літературних джерел, які були використані в РГР. Джерела слід розміщати в порядку посилань на них у тексті. Допускається розміщення джерел за алфавітом. Посилання на джерела мають вигляд “в роботі [1] наведено...”, “питання розглянуто в роботах [3-5]”.

Інформацію про джерела, які включені до переліку посилань, необхідно подавати в відповідності до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 [4].

Додатки слід розміщати в кінці роботи і позначати послідовно великими літерами українського алфавіту або арабськими цифрами, наприклад «Додаток А» чи «Додаток 1».Dodatki повинні мати спільну з рештою матеріалу наскрізну нумерацію сторінок.

## 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДО ВИКОНАННЯ РОЗДІЛІВ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

### 2.1. Загальні вимоги

Розв'язання задач повинні включати необхідні розрахункові формули та послідовність розрахунків відповідно індивідуальному завданню. Обчислення повинні супроводжуватись вказівками на теоретичні відомості, використані при їхньому виконанні (визначення, властивості та ін.).

Розрахунки повинні проводитись без застосування спеціалізованого програмного забезпечення.

Всі графіки повинні бути побудовані за відповідними формулами з дотриманням необхідних масштабів. Для побудови графіків можливе застосування засобів обчислювальної техніки.

Числові результати, які отримані при використанні конкретних розрахунків, необхідно округляти до двох знаків після коми, наприклад:  $2,315 \approx 2,32$  чи  $1,299 \approx 1,30$ .

### 2.2. Кінетична енергія системи матеріальних точок

#### 2.2.1. Теоретичні відомості

*Кінетичною енергією* системи матеріальних точок називається сума кінетичних енергій точок, що утворюють систему:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (2.1)$$

Якщо система представляє собою неперервне середовище, то, розбиваючи його на  $n$  елементів маси  $\Delta m_i$ , знайдемо наближено кінетичну енергію



$$T \cong \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2},$$

де  $v_i$  – швидкість внутрішньої точки елемента  $\Delta m_i$ . Покладемо, що елемент надзвичайно малий і швидкості всіх його точок наближено однакові.

Щоб знайти точне значення кінетичної енергії неперервного середовища, збільшимо число елементів  $n$  до нескінченності, стягуючи кожний в точку. Після граничного переходу отримаємо

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm \quad (2.2)$$

Розповсюдимо *теорему про зміну кінетичної енергії* на систему матеріальних точок: зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює роботі, що створюється силами, що діють на точки системи за той же проміжок часу.

Розглянемо систему, що складається із  $n$  дискретних точок із масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . У кожній точці системи можна застосувати теорему про зміну кінетичної енергії. Для  $i$ -тої точки системи можна записати:

$$\frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = A_i \quad (2.3)$$

Просумуємо рівність (в) за числом точок у системі. Отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (2.4)$$

На підставі (2.1) надамо формулі (2.4) вигляд

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (2.5)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  – кінетична енергія системи у початковий і кінцевий моменти часу; елементарна робота рівнодійної сил, що прикладені до матеріальної точки і дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт  $A_i$  складових сил.

Рівність (2.5) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.

Щоб застосувати теорему до розв'язання задач, потрібно вміти обчислювати кінетичну енергію систем твердих тіл для різних випадків їх рухів.

В залежності від способу руху матеріальної системи різняться і вирази для кінетичної енергії.

1. При поступальному русі  $\vec{v}_i = \vec{v}_c$ , тоді:

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} v_c^2 dm = \frac{v_c^2}{2} \int_{(m)} dm = \frac{mv_c^2}{2}.$$

1. При обертальному русі:

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} \omega^2 r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_{(m)} r^2 dm = \frac{\omega^2 I_z}{2},$$

де  $v = \omega r$  - модуль формули Ейлера, а  $I_z$  - осьовий момент інерції.

2. При плоско-паралельному русі:

$$T = \frac{\omega^2 I_P}{2},$$

причому  $I_P = I_c + mh^2$ . Тоді

$$T = \frac{\omega^2}{2} (I_c + mh^2) = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{mh^2 \omega^2}{2} = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

### 2.2.2. Порядок розв'язування завдань

1. Провести аналіз руху механізму.
2. Обчислити кінетичну енергію тіл, в залежності від способу руху тіла.
3. Визначити кінетичну енергію системи.
4. Позначити активні сили, що діють на систему.
5. Визначити роботи активних сил, що діють на систему.
6. Підставити отримані вирази у формулу (2.5).
7. Для обчислення швидкості тіла, з отриманого рівняння знаходимо невідому величину.

8. Для обчислення прискорення тіла, необхідно знайти похідну за часом від отриманого виразу (враховуючи зв'язок між переміщенням, швидкістю та прискоренням).
9. Розв'язати одержаний вираз відносно шуканої величини.

### 2.2.3. Приклади розв'язування завдань

Тіло 1 масою  $m$  під дією сили тяжіння починає спускатися по похилій площині і змушує рухатись каток 3 масою  $m_3 = \frac{m}{8}$  і радіусом  $R_3 = 0,35$  м за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, які перекинуті через нерухомий блок 2 масою  $m_2 = \frac{m}{4}$  (рис. 2.1). Каток 3 вважати однорідним циліндром. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. Ковзання катка 3 по площині, а також ниток по блоку 2 відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 по похилій площині дорівнює  $f = 0,2$ , а коефіцієнт тертя кочення катка 3 по похилій площині дорівнює  $\delta = 0,2 \text{ см}$ .

Визначити прискорення тіла 1.

#### *Розв'язання*

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Кінетична енергія  $T_0 = 0$ , оскільки  $v_{10} = 0$ .

Кінетична енергія системи складається з трьох складових, оскільки рух здійснюють три тіла масами  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$ .

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

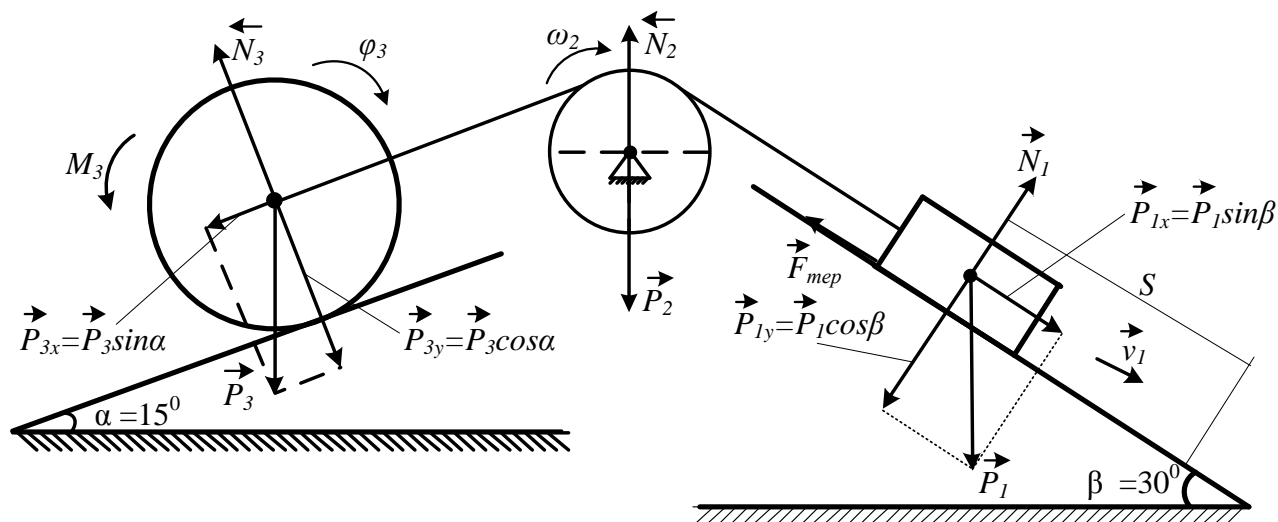


Рис. 2.1

Тіло 1 здійснює поступальний рух, тому його кінетична енергія визначається за формулою

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2}.$$

Тіло 2 здійснює обертальний рух тому його кінетична енергія визначається за формулою

$$T_2 = \frac{\omega_2^2 I_2}{2}.$$

де  $I_2$  – момент інерції тіла 2 відносно осі обертання.

Кутова швидкість блока 2

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2}.$$

Оскільки нитка нерозтяжна, то

$$v_2 = v_1,$$

тому

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}.$$

Момент інерції тіла для однорідного циліндра

$$I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Враховуючи, що

$$m_2 = \frac{m}{4}$$

отримаємо

$$I_2 = \frac{m R_2^2}{8}.$$

Т.ч.,

$$T_2 = \frac{m v_1^2}{16}.$$

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух (рис. 2.2). Плоскопаралельний рух – це нескінченна сума миттєвих обертальних рухів тіла навколо миттєвого центру швидкості.

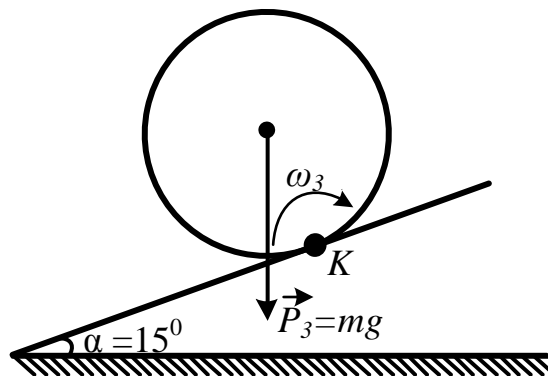


Рис. 2.2

На рис. 2.2 точка К – миттєвий центр швидкості.

В цьому випадку кінетична енергія знаходиться з виразу

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}$$

Враховуючи, що тіло 3 – однорідний диск

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2};$$

$$v_3 = v_1;$$

$$\omega_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{v_1}{R_3};$$

$$m_3 = \frac{m}{8}.$$

$$T_3 = \frac{m v_1^2}{16} + \frac{m R_3^2 v_1^2}{32 R_3^2} = \frac{m v_1^2}{16} + \frac{m v_1^2}{32} = \frac{3m v_1^2}{32}$$

Підставимо отримані вирази в формулу для визначення кінетичної енергії системи:

$$T = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_1^2}{16} + \frac{3m v_1^2}{32} = \frac{21m v_1^2}{32} \approx 0,656m v_1^2.$$

Знайдемо роботу активних сил, що прикладені до системи тіл.

$$A_{P_1} = mg \sin \beta \cdot S;$$

$$A_{P_3} = -m_3 g \sin \alpha \cdot S_3.$$

Враховуючи, що  $\frac{m}{8} = m_3$  і  $S_3 = S$ , отримаємо

$$A_{P_3} = -\frac{m}{8} g \sin \alpha \cdot S$$

Робота моменту сили тертя кочення

$$A_{M_3} = -M_3 \cdot \varphi_3$$

$$M_3 = N_3 \cdot \delta,$$

де  $\delta$  – коефіцієнт тертя кочення.

$$N_3 = m_3 g \cos \alpha = \frac{m}{8} g \cos \alpha$$

$$\varphi \cdot R = S$$

$$\varphi_3 = \frac{S_3}{R_3} = \frac{S}{R_3}$$

Тоді

$$A_{M3} = -\frac{m}{8} g \cos \alpha \cdot \delta \frac{S}{R_3}.$$

Робота сили тертя

$$A_{F_{тер}} = F_{тер} \cdot S = -mg \cdot f \cdot \cos \beta \cdot S$$

$$\sum_i A_i = A_{p1} + A_{p3} + A_{M3} + A_{F_{тер}} = mgS \left( \sin \beta - \frac{\sin \alpha}{8} - \frac{\cos \alpha \cdot \delta}{8R_3} - f \cos \beta \right) \approx 0,294mgS$$

За теоремою про зміну кінетичної енергії системи:

$$0,656m v_1^2 = 0,294mgS;$$

$$v_1^2 = 4,48S.$$

Знайдемо похідну за часом від обох частин отриманого виразу:

$$2v_1 \frac{dv_1}{dt} = 4,48 \frac{dS}{dt};$$

Враховуючи, що

$$\frac{dv_1}{dt} = w_1 \text{ і } \frac{dS}{dt} = v_1$$

$$2w_1 = 4,48 \Rightarrow w_1 = 2,24 \text{ м/с}^2.$$

## 2.3. Принцип Д'Аламбера

### 2.3.1. Теоретичні відомості

Принцип Д'Аламбера дозволяє формально зрівноважити систему сил прикладених до невільної матеріальної точки.

Рівняння руху невільної матеріальної точки у векторній формі можна записати у вигляді:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Звідки

$$\vec{F} + \vec{R} - m\vec{w} = 0.$$

Доданок  $(-m\vec{w})$  називають Д'Аламберовою силою інерції:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Це рівняння виражає принцип Д'Аламбера для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакції в'язей і сил інерції дорівнює нулю.

Однак ця рівність не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл. Цей метод є лише формальним способом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статички, проте для розв'язання ряду практичних завдань такий спосіб має свої переваги.

Силою інерції точки називають векторну величину, яка має розмірність сили, рівна по модулю добутку маси точки на її прискорення і спрямовану протилежно прискоренню:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}.$$

Розглянемо механічну систему як відому сукупність матеріальних точок, на кожен з яких діє (згідно з принципом Д'Аламбера) зрівноважені системи сил. Маємо принцип Д'Аламбера для системи:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i = 0; \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_0(\vec{R}_i) + \sum_{i=1}^n M_0(\vec{\Phi}_i) = 0. \quad (2.7)$$

Кожна сума репрезентує головний вектор і головний момент відповідних сил.

Принцип Д'Аламбера дає єдиний метод складання диференціальних рівнянь руху невільних систем. Використання принципу Д'Аламбера для



розв'язування задач динаміки методом рівноваги сил статички називається методом кінетостатики.

Рівнянням (2.6), (2.7) у векторній формі відповідають шість рівнянь у координатній формі:

$$1) F_x + R_x + \Phi_x = 0;$$

$$2) F_y + R_y + \Phi_y = 0;$$

$$3) F_z + R_z + \Phi_z = 0;$$

$$4) M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi = 0;$$

$$5) M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi = 0;$$

$$6) M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi = 0.$$

Рівняння утримують проекції головних векторів і головних моментів на відповідні осі.

### 2.3.2. Порядок розв'язування завдань

1. Провести аналіз руху механізму.
2. Обрати систему координат.
3. Позначити активні сили, що діють на систему.
4. Визначити реакції в'язей та позначити їх на рисунку.
5. Визначити напрями прискорень точок та позначити сили інерції системи.
6. Скласти рівняння “рівноваги” матеріальної системи відповідно до методу кінетостатики.
7. Розв'язати одержану систему рівнянь.

### 2.3.3. Приклади розв'язування завдань

Тіло  $A$  масою  $m_1$ , що опускається по похилій площині  $D$ , приводить в рух тіло  $B$  масою  $m_2$  з допомогою нерозтяжної нитки, перекинutoї через нерухомий блок  $C$  (рис. 2.3). Визначити горизонтальну складову тиснення похилої площини  $D$  на виступ підлоги  $E$ . Масою нитки знехтувати.

## Розв'язання

Позначимо на рисунку активні сили: сили ваги тіл та силу ваги похилої площини; реакції в'язей: горизонтальну та нормальну складові реакції між похилою площиною та підлогою; сили інерції тіл  $A$  та  $B$  припускаючи, що тіло  $A$  спускається з прискоренням  $w_A$ . З умови нерозтяжності нитки випливає, що прискорення тіл однакові, тобто  $w_A = w_B = w$ .

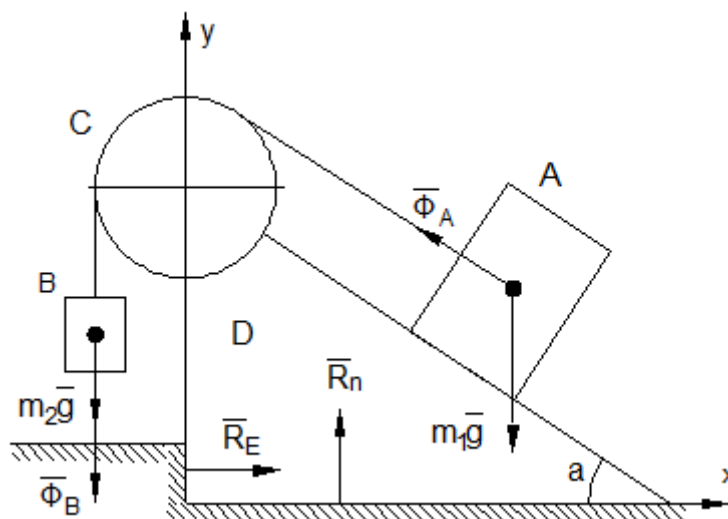


Рис. 2.3

Запишемо для системи рівняння кінетостатики в проекції на горизонтальну вісь  $X$  (рис. 2.3)

$$R_E - \Phi_A \cos \alpha = 0 \quad \text{або} \quad R_E - m_1 w \cos \alpha = 0;$$

звідки  $R_E = m_1 w \cos \alpha$ .

Щоб обчислити прискорення тіла  $A$  розглянемо окремо рух кожного з тіл  $A$  та  $B$  у проекціях на осі  $X$  та  $Y$  відповідно:

для  $X$ :  $m_1 g \sin \alpha - T - \Phi_A = 0$  (рис. 2.4);

для  $Y$ :  $-m_2 g + T - \Phi_B = 0$  (рис. 2.5).

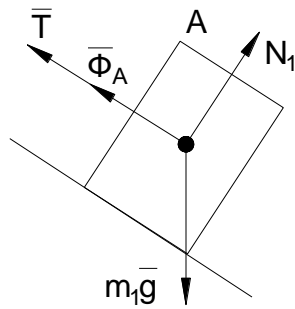


Рис. 2.4

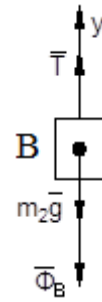


Рис. 2.5

Склавши рівняння та врахувавши визначення сил інерції, одержимо:

$$R_E = m_1 g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha;$$

$$(m_1 \sin \alpha - m_2)g - (m_1 + m_2)w = 0;$$

$$w = \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

З формули для обчислення прискорення тіл випливає умова напрямку руху тіл *A* та *B*. Якщо прискорення *w* додатне, то тіло *A* спускається, а тіло *B* піднімається.

Горизонтальну складову тиснення похилої площини *D* на виступ підлоги *E* знайдемо підставляючи отримане прискорення у вираз

$$R_E = m_1 w \cos \alpha = \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2)m_1 g \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

## 2.4. Рівняння Лагранжа 2 роду

### 2.4.1. Теоретичні відомості

#### *Узагальнені координати і узагальнені швидкості*

Узагальненими координатами  $q_j$  ( $j=1,2,\dots,S$ ) називають незалежні параметри, що однозначно визначають положення точок матеріальної системи. Узагальненими координатами ( $q_j$ ) можуть бути лінійні величини,

кут повороту тіла, площа описувана кривошипом, об'єм в циліндрі під поршнем і т.п.

$S$  – число ступенів вільності матеріальної системи, яка підпорядкована ідеальним голономним в'язям. Це кількість незалежних координат, однозначно визначаючих положення матеріальної системи.

Таким чином, рух системи в узагальнених координатах визначається системою рівнянь

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \dots, q_s = q_s(t).$$

Похідні від узагальнених координат за часом називають узагальненими швидкостями –  $(\dot{q}_j) \quad j = 1, 2, \dots, S$ .

### **Узагальнені сили**

По аналогії з обчисленням елементарної роботи сили  $\vec{F}$  на можливому переміщенні  $\delta \vec{r}$

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Елементарна робота всіх  $n$  сил, діючих на систему, на можливому переміщенні, при якому змінюється тільки узагальнена координата  $q_1$

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i; \quad \delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1,$$

де  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$  – положення кожної точки системи  $\vec{r}_i$  є однозначною функцією узагальнених координат.

Тоді  $\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1$  або  $\delta A = Q_1 \delta q_1$ , де  $Q_1 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}$  – узагальнена сила.

Надавши системі друге віртуальне переміщення, при якому змінюється тільки координата  $q_2$

$$\delta q_1 = 0; \quad \delta q_2 \neq 0; \quad q_j = 0, \quad j = (1, 2, \dots, S)$$

$$\delta A = Q_2 \delta q_2 \quad \text{де} \quad Q_2 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}.$$

Таким чином, узагальненою силою  $Q_j$  називають множник при варіації узагальненої координати у виразі для обчислення роботи на віртуальному переміщенні, або:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}; \quad j = (1, 2, \dots, S).$$

Фізичний зміст узагальненої сили визначають розмірністю узагальненої координати, тобто

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Відповідно до способу задання сил узагальнені сили визначають одним з трьох способів:

а) Відповідно до визначення: задають незалежне віртуальне переміщення першої з обраних узагальнених координат  $\delta q_1$ , одночасно поклавши всі інші  $\delta q_j$  нульовими. Обчислюють роботу та виділяють множник, який є узагальненою силою. Послідовно задають віртуальні переміщення інших узагальнених координат та обчислюють відповідні узагальнені сили;

б) Якщо рух системи описується координатним методом:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n (F_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}); \quad j = (1, 2, \dots, S)$$

в) Якщо відома потенціальна енергія системи:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}; \quad j = (1, 2, \dots, S).$$

Рівняння Лагранжа II роду записують у такій формі

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = (1, 2, \dots, S).$$

У разі консервативної системи, коли усі активні сили потенціальні та потенціальна енергія дорівнює  $\Pi$  рівняння Лагранжа має таку форму:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}; \quad j = (1, 2, \dots, S). \quad (2.8)$$

#### 2.4.2. Порядок розв'язування завдання

1. Провести аналіз руху механічної системи.
2. Визначити кількість ступенів вільності матеріальної системи.
3. Обрати систему координат та ввести незалежні узагальнені координати у числі, яке дорівнює числу ступенів вільності матеріальної системи.
4. Визначити кінетичну енергію матеріальної системи через обрані узагальнені координати.
5. Знайти частинні похідні від кінетичної енергії системи за узагальненими швидкостями, а потім їх похідні за часом.
6. Знайти частинні похідні від кінетичної енергії системи за узагальненими координатами.
7. Зобразити активні сили, що діють на систему, та проаналізувати їх.
8. Провести аналіз в'язей, які прикладені до системи. Визначити та позначити неідеальні в'язі та ті, що необхідно знайти за умовою задачі.
9. Визначити узагальнені сили.
10. Скласти рівняння (2.8), що відповідають обраним узагальненим координатам, у формі рівнянь Лагранжа II роду.
11. Розв'язати систему рівнянь.

#### 2.4.3. Приклади розв'язування задач

Тягар 1 вагою  $P_1 = 400$  Н, спускаючись донизу по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут  $\alpha$ , приводить у рух ступінчатий каток 3 вагою  $P_3 = 200$  Н завдяки невагомій нерозтяжній нитці, перекинутій через нерухомий блок 2 вагою  $P_2 = 200$  Н. Радіуси катка 3 дорівнюють  $r_3 = 0,2$  м,

$R_3 = 0,6$  м. Каток 3 котиться без ковзання по поверхні нахиленої під кутом  $\beta$  до горизонту. Радіус інерції катка 3 відносно осі  $O_1$  дорівнює  $\rho_{O_1} = 0,4$  м. Блок 2 вважати однорідним диском. Ковзання нитки в блоці відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\sqrt{2} = 1,4$ ,  $\sqrt{3} = 1,7$ . Визначити прискорення тягара 1 (рис. 2.6).

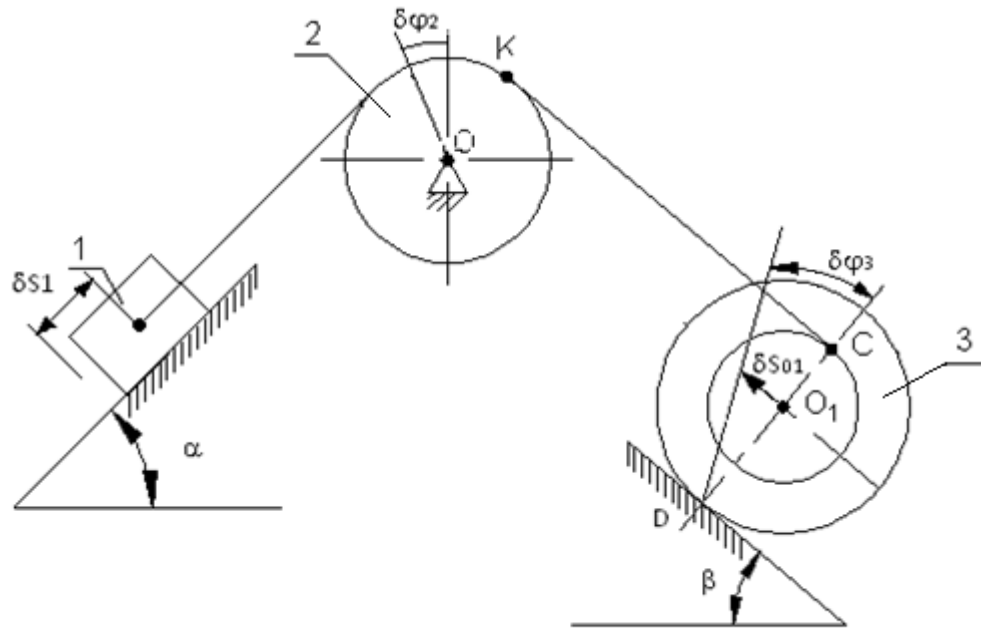


Рис. 2.6

### Розв'язання

Зображаємо спочатку на схемі всі активні сили  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Надамо механічній системі можливе переміщення. Оскільки система має одну ступінь вільності, то можливі переміщення різних сил системи взаємозв'язані. Позначимо можливі переміщення тіл системи: тягара 1 -  $\delta S_1$ , блока 2 -  $\delta \varphi_2$ , катка 3 -  $\delta S_{O_1}$ .

Знайдемо зв'язок між можливими переміщеннями і можливими кутами повороту:

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2};$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{R_3 + r_3} = \frac{\delta S_{01}}{R_3} \Rightarrow$$

$$\delta S_{01} = \frac{\delta S_1 R_3}{R_3 + r_3};$$

Узагальненою координатою є переміщення тягача 1 -  $q = S_1$ ,  
узагальненою швидкістю -  $\dot{q} = \dot{S}_1 = v_1$ .

Запишемо диференціальне рівняння у формі Лагранжа 2 роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Знаходимо складові, які входять в дане рівняння. Визначимо спочатку кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  - кінетична енергія тягача 1, блока 2, катка 3

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 \cdot v_1^2}{2g};$$

$$T_2 = I_0 \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{P_3 R_2^2 \omega_2^2}{4g};$$

$$T_3 = I_{01} \frac{\omega_3^2}{2} + \frac{m_3 v_{01}^2}{2} = \frac{P_3 \rho_{01}^2 \omega_3^2}{2g} + \frac{P_3 v_{01}^2}{2g}.$$

Підставивши отримані значення складових кінетичної енергії до загального виразу, отримаємо:

$$T = \frac{P_1 \cdot v_1^2}{2g} + \frac{P_2 R_2^2 \omega_2^2}{4g} + \frac{P_3 \rho_{01}^2 \omega_3^2}{2g} + \frac{P_3 v_{01}^2}{2g}.$$

Виразимо швидкості, що входять в отриманий вираз через узагальнену швидкість:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}.$$



Оскільки  $v_K = v_C$

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 (R_3 + r_3) \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3 + r_3} = \frac{v_1}{R_3 + r_3}.$$

$$V_{01} = \omega_3 R_3 = \frac{v_1}{R_3 + r_3} R_3.$$

Виразимо кінетичну енергію через узагальнену швидкість  $v_1$ :

$$T = \frac{P_1 \cdot v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{4g} + \frac{P_3 (R_3^2 + \rho_{01}^2) v_1^2}{2g (R_3 + r_3)^2} = \frac{1}{2g} v_1^2 \left( P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3 (R_3 + \rho_{01}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right).$$

Знайдемо узагальнену силу  $Q$ , скориставшись переміщенням даної механічної системи. Визначимо елементарну роботу  $\delta A$  на цьому переміщенні:

$$\delta A = P_1 \sin \alpha \delta S_1 - P_3 \sin \beta \delta S_{01}.$$

Враховуючи приведені вище зв'язки між можливими переміщеннями, перепишемо можливу роботу в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta A &= P_1 \sin \alpha \delta S_1 - P_3 \sin \beta \delta S_1 \frac{R_3}{(R_3 + r_3)} = \\ &= \delta S_1 \left( P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_3}{(R_3 + r_3)} \right). \end{aligned}$$

Узагальнена сила  $Q$  дорівнює коефіцієнту при варіації узагальненої координати:

$$Q = P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_3}{(R_3 + r_3)}.$$

Рівняння Лагранжа 2 роду має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q.$$

Так як кінетична енергія не тримає у своєму вигляді узагальненої координати  $S_1$ , то

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0.$$

Решта величин будуть дорівнювати:

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = v_1 \frac{1}{g} \left( P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{01}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right);$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_1} = \frac{dv_1}{dt} \frac{1}{g} \left( P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{01}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right).$$

Оскільки  $\frac{dv_1}{dt} = w_1$ , то остаточно диференціальне рівняння руху

механічної системи має вигляд

$$w_1 \frac{1}{g} \left( P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{01}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right) = P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_3}{R_3 + r_3};$$

$$w_1 = \frac{g \left( P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta \frac{R_3}{R_3 + r_3} \right)}{\left( P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3(R_3^2 + \rho_{01}^2)}{(R_3 + r_3)^2} \right)} = 3,1 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь:  $w_1 = 3,1 \text{ м/с}^2$ .

### **РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА**

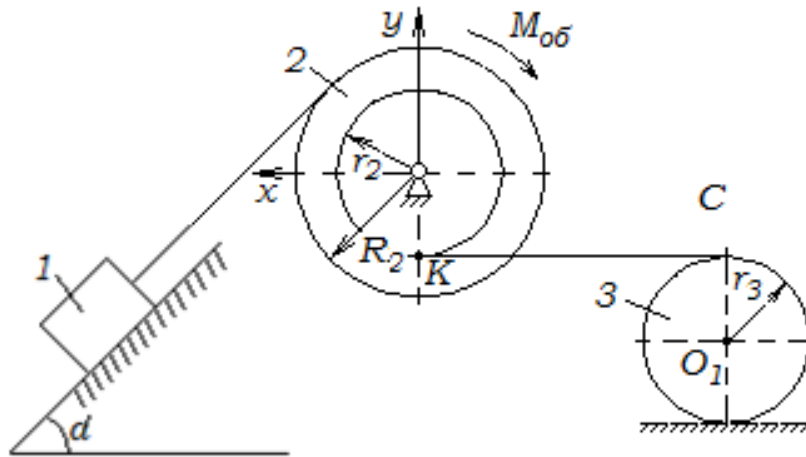
1. Російсько-український математичний словник / В.Я. Карачун, О.О. Карачун, Г.Г. Гульчук. – К.: Вища школа, 1995. – 258 с.
2. Новий українсько-російський і російсько-український словник. – Харків: ЧП “Див”, 2006. – 576 с.
3. ДСТУ 3008-95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. – Чинний від 01.01.96 р.
4. ДСТУ ГОСТ 7.1:2006. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання. – Чинний від 01.07. 2007 р.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: «Техніка», 2002, – 512 с.
6. Ільчишина Д.І., Шальда Л.М. Теоретична механіка. –К.: «НМК ВО», 1991, – 253 с.

# ДОДАТКИ

## Додаток Д. 1 Варіанти завдання

### Варіант 1

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 1850 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 900 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 3120 \text{ Н}$  і рухає каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 4100 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,6 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блоку 2 відносно вісі  $O$  дорівнює -  $\rho_o = 0,5 \text{ м}$ . Масу катка 3 вважати рівномірно розподіленою по його поверхні. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

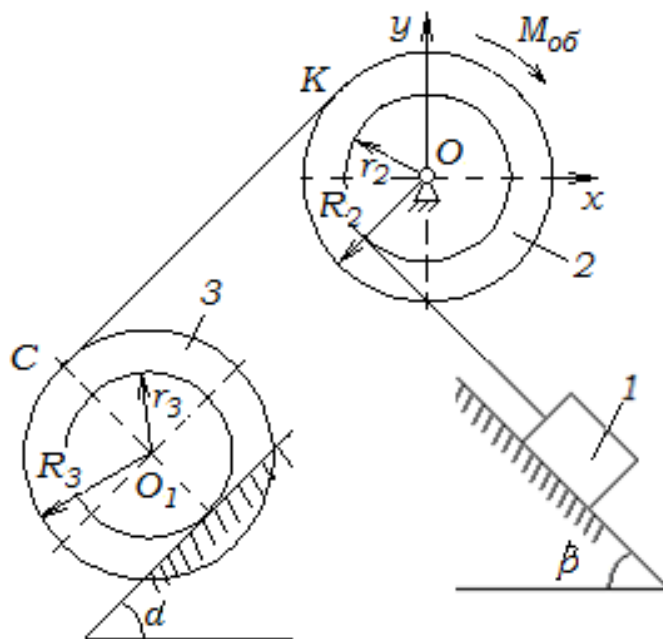


Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

## Варіант 2

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 180 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 1200 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 3000 \text{ Н}$  і приводить у рух ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 4000 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,6 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,3 \text{ м}$ ;  $R_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 та катка 3 відносно осей  $O$  та  $O_1$  відповідно дорівнюють -  $\rho_o = 0,5 \text{ м}$ ;  $\rho_{o1} = 0,4 \text{ м}$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та ниток по блоку 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам, з кутами нахилу до горизонту  $\alpha, \beta$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 по похилій площині дорівнює  $f = 0,1$ .



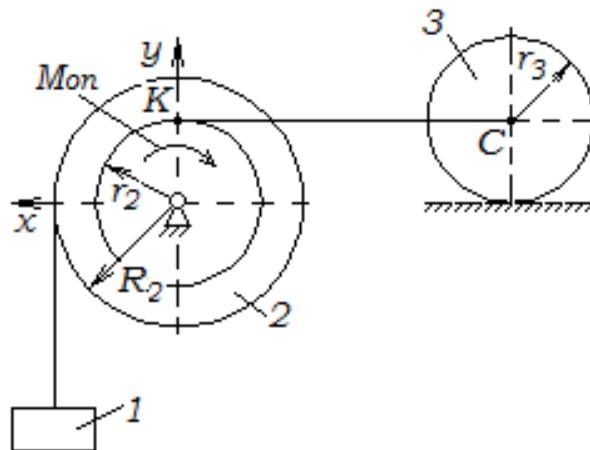
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 3

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 200$  Н, опускається до низу та змушує рухатись каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 100$  Н, за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що намотані на двоступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 100$  Н.

Радіуси блока 2:  $r_2 = 0,2$  м;  $R_2 = 0,4$  м, а його радіус інерції відносно вісі  $O$ :  $\rho_o = 0,3$  м. Маса катка 3 з радіусом  $r_3 = 0,5$  м рівномірно розподілена по його зовнішній поверхні. До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 36$  Н·м. Ковзання катка 3 по поверхні, а також ниток по блоку 2 відсутнє. Поверхня та ділянка нитки КС горизонтальні. При розрахунках прийняти  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

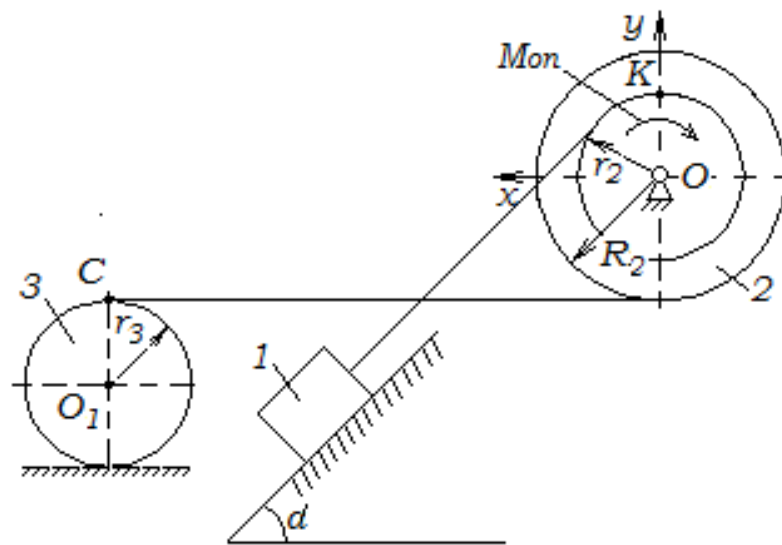


Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

#### Варіант № 4

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 170 \text{ Н}$  спускається до низу по похилій площині і змушує рухатись, за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, які охоплюють ступінчатий нерухомий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 30 \text{ Н}$ , каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 60 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 1,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,3 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,4 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіус інерції блоку 2 відносно вісі  $O$  дорівнює  $\rho_o = 0,3 \text{ м}$ . Каток 3 вважати однорідним циліндром. Площина по якій рухається тіло 1 нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонту. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. Ковзання катка 3 по площині, а також ниток по блоку 2 відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sqrt{2} = 1,4$  та  $\sqrt{3} = 1,7$ .



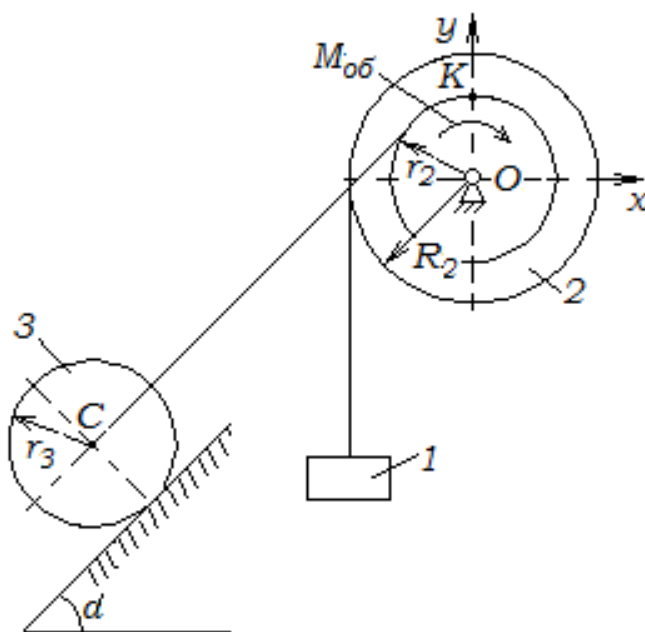
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.



### Варіант № 5

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 50 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 50 \text{ Н}$  і рухає каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 50 \text{ Н}$  за допомогою невагомої нерозтяжної нитки перекинutoї через блок 2. Радіуси ступінчатого блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,3 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,2 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блоку 2 відносно вісі  $O$  дорівнює -  $\rho_O = 0,25 \text{ м}$ . Масу катка 3 вважати рівномірно розподіленою по його зовнішній поверхні. Ділянка нитки  $KC$  паралельна похилій площині. Ковзання між катком 3 та площиною, а також між ниткою та поверхнею блока 2 відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sqrt{3} = 1,7$ .

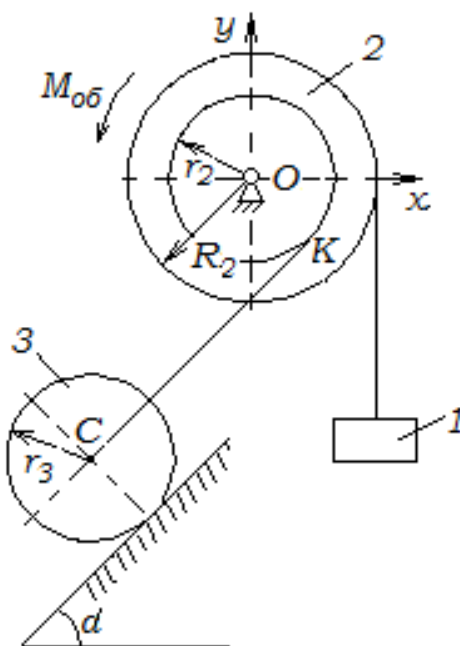


Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 6

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 3000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 1000 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 4000 \text{ Н}$  і приводить у рух каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 4000 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,25 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,5 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,4 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 відносно осі  $O$  -  $\rho_o = 0,4 \text{ м}$ . Маса катка 3 рівномірно розподілена на його зовнішній поверхні. Ділянка нитки КС паралельна площині, що похилена до горизонту під кутом  $\alpha$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та ниток по блоку 2 відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

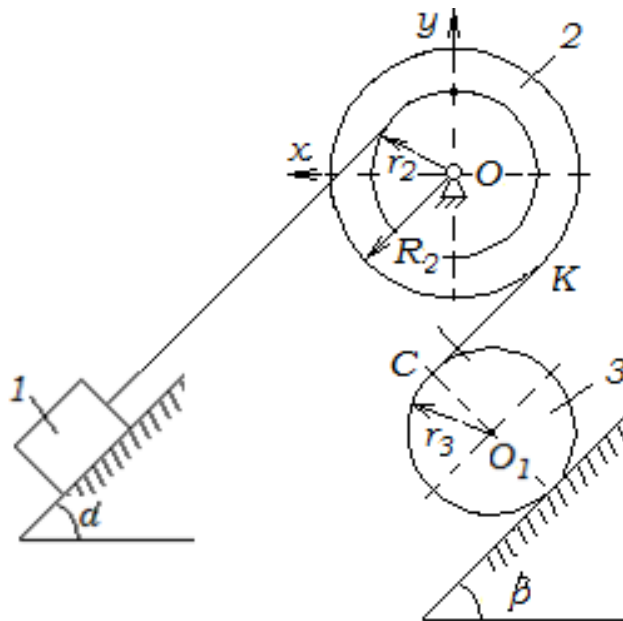


Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 7

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 440\text{ Н}$  спускається до низу по похилій площині і змушує рухатись каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 100\text{ Н}$ , за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, які охоплюють ступінчатий нерухомий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 100\text{ Н}$ . Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2\text{ м}$ ;  $R_2 = 0,3\text{ м}$ ,  $r_3 = 0,4\text{ м}$ . Радіус інерції блоку 2 відносно вісі  $O$  дорівнює  $\rho_O = 0,25\text{ м}$ . Каток 3 вважати однорідним циліндром. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. Ковзання катка 3 по площині, а також ниток по блоку 2 та катку 3 відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10\text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 по похилій площині дорівнює  $f = 0,1$ .



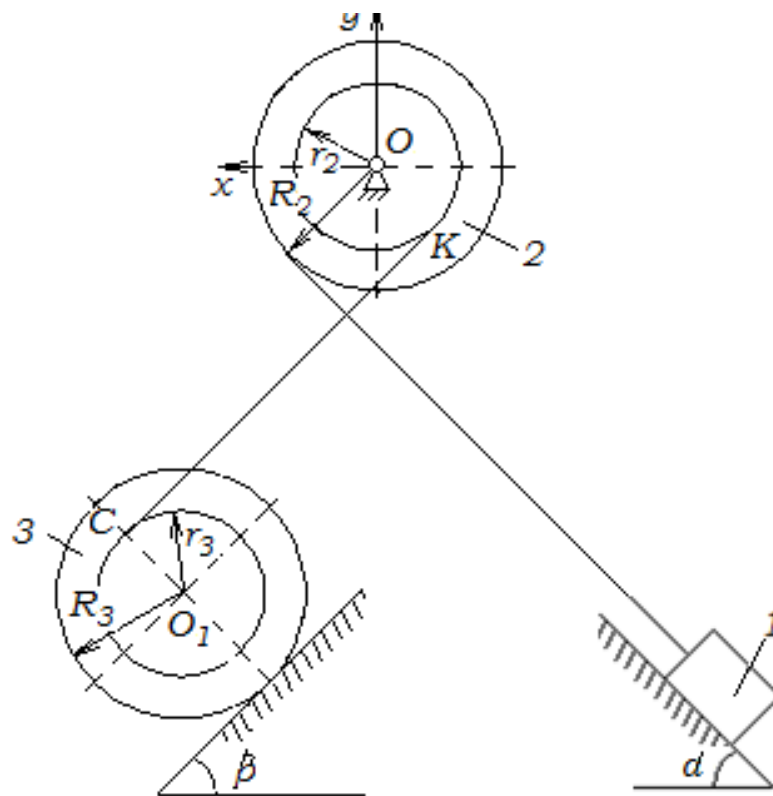
Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 8

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 250$  Н, опускається по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 80$  Н та ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 100$  Н за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2$  м,  $R_2 = 0,3$  м,  $r_3 = 0,3$  м,  $R_3 = 0,4$  м. Радіус інерції ступінчатого блока 2 відносно вісі  $O$  та катка 3 відносно вісі  $O_1$  відповідно дорівнюють  $\rho_o = 0,25$  м та  $\rho_{o_1} = 0,35$  м.

Ковзання катка 3 по поверхні, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $\alpha = \beta = 45^\circ$ . Коефіцієнт тертя тіла 1 на похилу площину дорівнює  $f = 0,1$ .



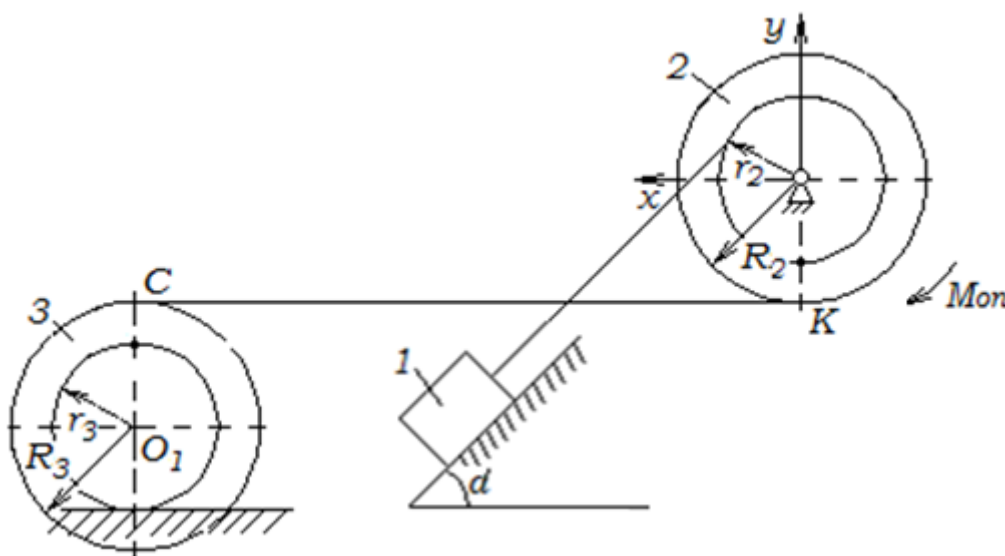
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 9

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 180 \text{ Н}$ , опускається по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 100 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що охоплюють нерухомий ступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 80 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 3,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $R_3 = 0,4 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блока 2 відносно вісі  $O$  та катка 3 відносно вісі  $O_1$  відповідно дорівнюють  $\rho_o = 0,25 \text{ м}$  та  $\rho_{o_1} = 0,35 \text{ м}$ .

Ковзання катка 3 по поверхні, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . Коефіцієнт тертя тіла 1 на похилу площину дорівнює  $f = 0,1$ .



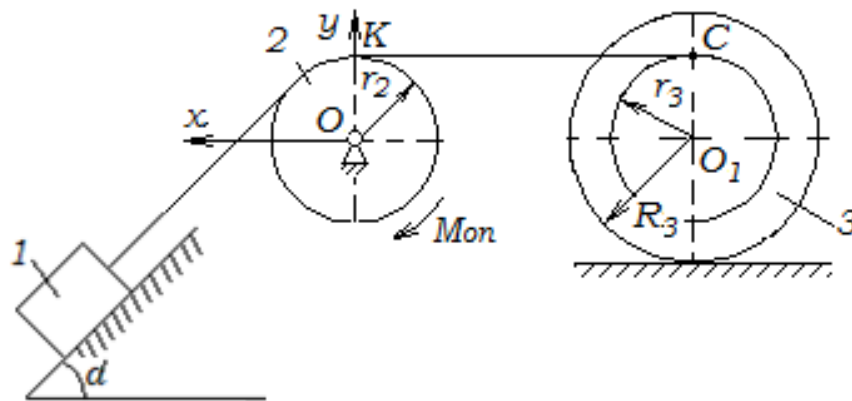
Необхідно визначити кутове прискорення блока 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 10

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 310 \text{ Н}$ , опускається по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 105 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що перекинуті через нерухомий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 110 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 22 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,15 \text{ м}$ ,  $R_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,5 \text{ м}$ . Блок 2 вважати однорідним диском, а маса катка 3 рівномірно розподілена на його зовнішньому ободу.

Ковзання катка 3 по похилій площині, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .



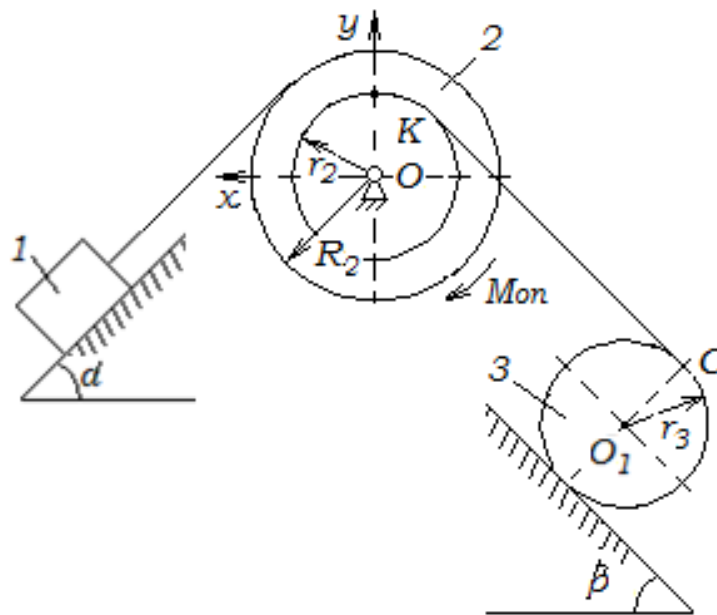
Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 11

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 100 \text{ Н}$ , опускається по похилій площині та змушує рухатись каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 60 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що охоплюють нерухомий ступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 40 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блока 2 відносно вісі  $O$  дорівнює  $\rho_O = 0,25 \text{ м}$ . Каток 3 вважати однорідним циліндром.

Ковзання катка 3 по похилій площині, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .



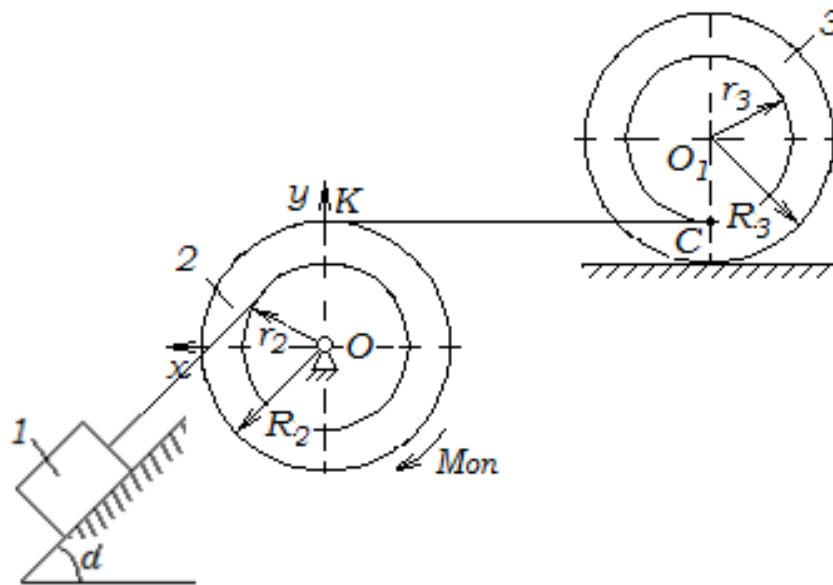
Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

## Варіант № 12

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 340 \text{ Н}$ , опускається по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 100 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що охоплюють нерухомий ступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 100 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 3,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,4 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блока 2 відносно вісі  $O$  та катка 3 відносно вісі  $O_1$  відповідно дорівнюють  $\rho_o = 0,25 \text{ м}$  та  $\rho_{o_1} = 0,4 \text{ м}$ .

Ковзання катка 3 по поверхні, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\sqrt{3} = 1,7$ .



Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

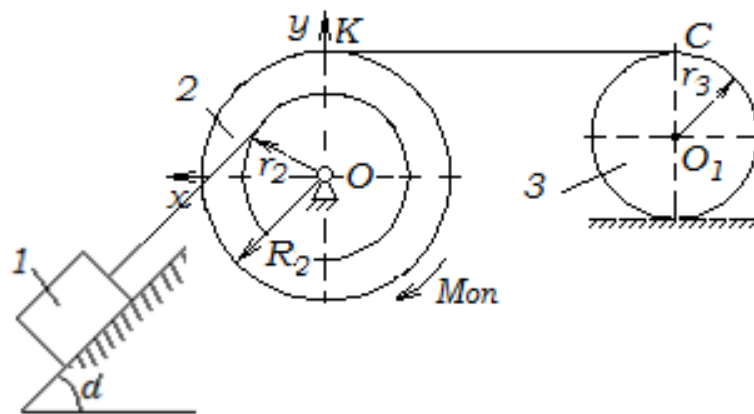
1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.



### Варіант № 13

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 260 \text{ Н}$ , опускається по похилій площині та змушує рухатись каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 90 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що охоплюють нерухомий ступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 60 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,25 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,35 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,4 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блока 2 відносно вісі  $O$  дорівнює  $\rho_O = 0,3 \text{ м}$ . Масу катка 3 вважати рівномірно розподіленою по його зовнішній поверхні.

Ковзання катка 3 по горизонтальній поверхні, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

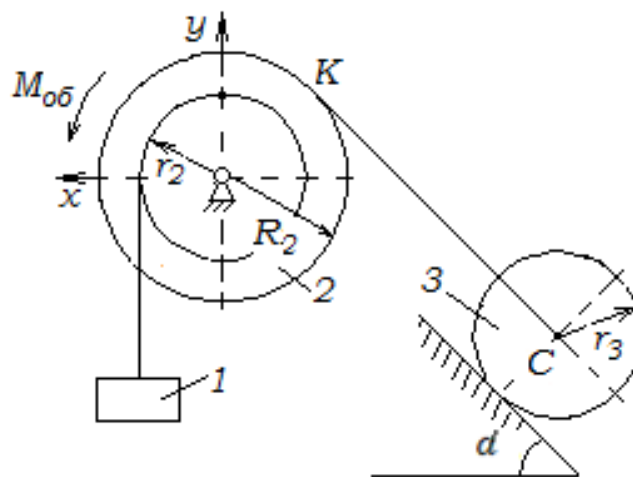


Необхідно визначити кутове прискорення блока 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 14

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до нерухомого ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 50 \text{ Н}$ , опускає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 150 \text{ Н}$  і рухає каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 50 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,5 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,2 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блоку 2 відносно вісі  $O$  дорівнює -  $\rho_o = 0,4 \text{ м}$ , маса катка 3 рівномірно розподіленою по його зовнішній поверхні. Ділянка нитки  $KС$  паралельна площині, похилений до горизонту під кутом  $\alpha$ . Ковзання катка 3 по площині, а також ниток по блоку 2 відсутнє. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .



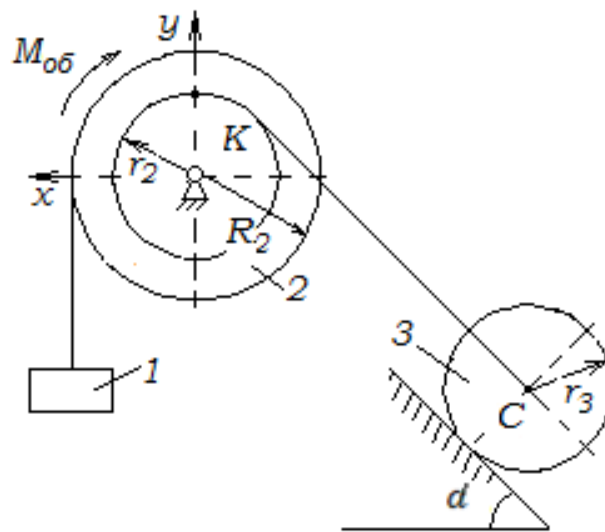
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 15

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 200 \text{ Н}$ , опускається до низу та змушує рухатись каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 90 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що охоплюють нерухомий ступінчатий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 90 \text{ Н}$ . До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 24,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,2 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блока 2 відносно вісі О дорівнює  $\rho_o = 0,25 \text{ м}$ . Масу катка 3 вважати рівномірно розподіленою по його зовнішній поверхні.

Ковзання катка 3 по похилій площині, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянка нитки КС паралельна площині, похиленій до горизонту під кутом  $\alpha$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sqrt{3} = 1,7$ .



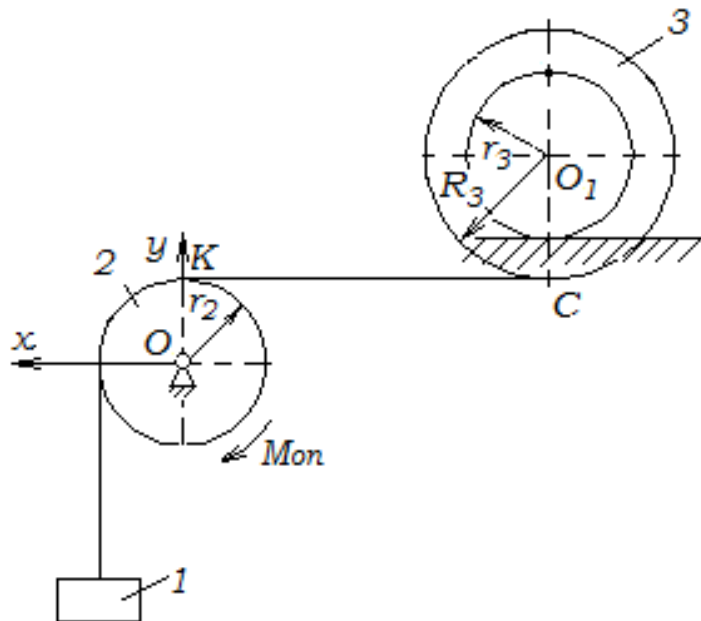
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 16

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 200 \text{ Н}$ , опускається та змушує рухатись ступінчатий каток 3 за допомогою невагомий нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2. Сили тяжіння блоку 2 -  $P_2 = 100 \text{ Н}$ , його радіус  $r_2 = 0,1 \text{ м}$ . Сила тяжіння катка 3 -  $P_3 = 200 \text{ Н}$ , його радіуси;  $r_3 = 0,1 \text{ м}$   $R_3 = 0,3 \text{ м}$ . Радіус інерції катка 3 відносно вісі  $O_1$  дорівнює  $\rho_{O_1} = 0,2 \text{ м}$ . До блоку 2, який представляє собою однорідний круглий диск, прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 3,44 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Ковзання між катком 3 і горизонтальною поверхнею, а також між ниткою і поверхнею блоку 2 відсутнє. Ділянка нитки  $KC$  паралельна горизонтальній поверхні. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



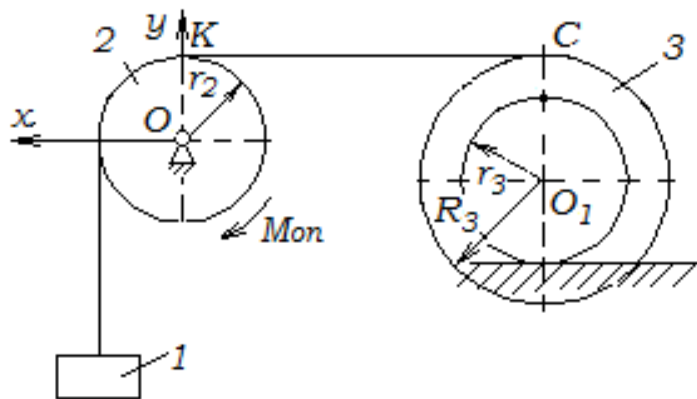
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 17

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 300 \text{ Н}$ , опускається та змушує рухатись ступінчатий каток 3 за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2. Сили тяжіння блоку 2 -  $P_2 = 50 \text{ Н}$ , його радіус  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ . Сила тяжіння катка 3 -  $P_3 = 200 \text{ Н}$ , його радіуси;  $r_3 = 0,4 \text{ м}$   $R_3 = 0,6 \text{ м}$ . Радіус інерції катка 3 відносно вісі С дорівнює  $\rho_C = 0,5 \text{ м}$ . До блоку 2, який представляє собою однорідний круглий диск, прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 3,44 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Ковзання між катком 3 і площиною, а також між ниткою і поверхнею блоку 2 відсутнє. Площина і ділянка нитки КС горизонтальні. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

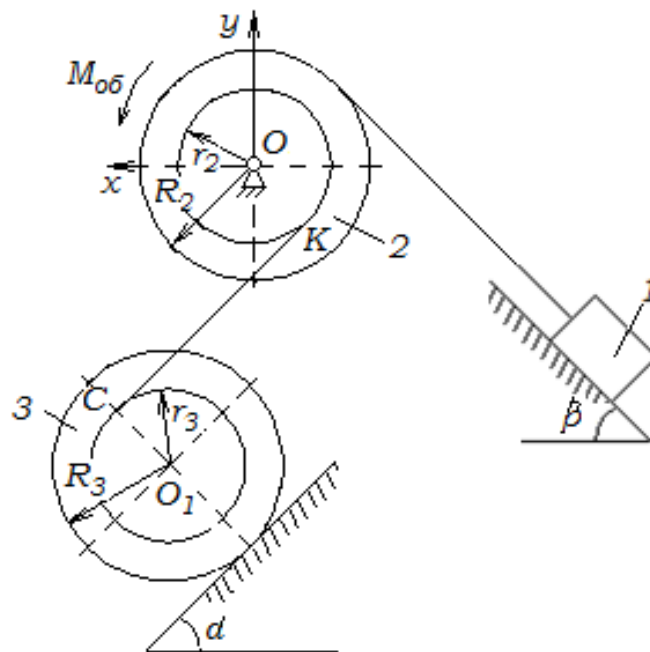


Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 18

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 1850 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 1000 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 2300 \text{ Н}$  і приводить у рух ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 3800 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,35 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,55 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 та катка 3 відносно осей  $O$  та  $O_1$  відповідно дорівнюють -  $\rho_o = 0,5 \text{ м}$ ;  $\rho_{o1} = 0,45 \text{ м}$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та ниток по блоку 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам, з кутами нахилу до горизонту  $\alpha, \beta$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ , коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 по похилій площині дорівнює  $f = 0,1$ .



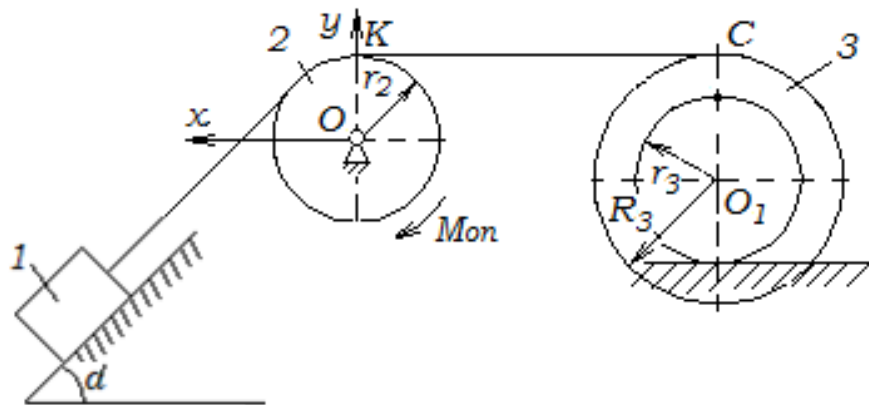
Необхідно визначити кутове прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 19

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 220 \text{ Н}$ , опускається до низу по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий каток 3 за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2. Сили тяжіння блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $P_2 = 80 \text{ Н}$ ,  $P_3 = 100 \text{ Н}$ , їх радіуси  $r_2 = 0,3 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,15 \text{ м}$ ,  $R_3 = 0,25 \text{ м}$ .

Маси блоку 2 та катка 3 вважати рівномірно розподіленими по їх зовнішнім поверхням. На блок 2 діє постійний момент опору  $M_{on} = 8 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Ковзання катка 3 по поверхні та нитки по поверхні блоку 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

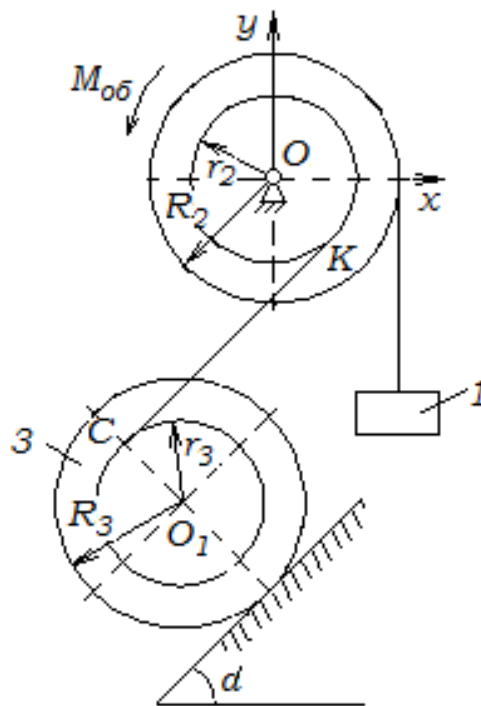


Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 20

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 2800 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 800 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 3800 \text{ Н}$  і рухає ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 3800 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,25 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,45 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,2 \text{ м}$ ;  $R_3 = 0,4 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 та катка 3 відносно осей  $O$  та  $O_1$  відповідно дорівнюють -  $\rho_O = 0,35 \text{ м}$ ;  $\rho_{O1} = 0,3 \text{ м}$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та нитки по ступінчатому блоку 2 відсутнє. Ділянка нитки  $KC$  паралельна похилій площині, з кутом нахилу до горизонту  $\alpha$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .



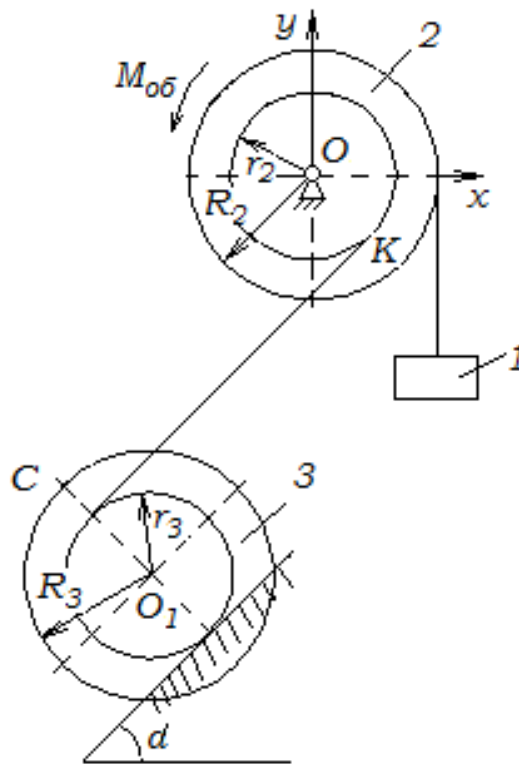
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.



### Варіант № 21

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 2900 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 700 \text{ Н}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 3800 \text{ Н}$  і рухає ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 3900 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,3 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,25 \text{ м}$ ;  $R_3 = 0,4 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 та катка 3 відносно осей  $O$  та  $O_1$  відповідно дорівнюють -  $\rho_O = 0,35 \text{ м}$ ;  $\rho_{O1} = 0,3 \text{ м}$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та нитки по ступінчатому блоку 2 відсутнє. Ділянка нитки  $KC$  паралельна похилій площині, з кутом нахилу до горизонту  $\alpha$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .



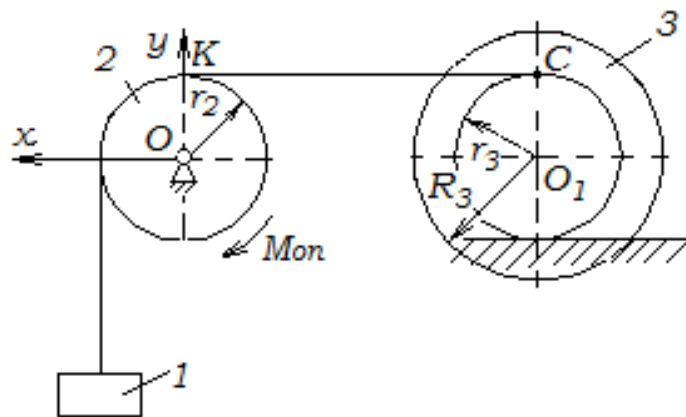
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 22

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 200 \text{ Н}$ , опускається та змушує рухатись ступінчатий каток 3 за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2. Сили тяжіння блоку 2 -  $P_2 = 100 \text{ Н}$ , його радіус  $r_2 = 0,1 \text{ м}$ . Сила тяжіння катка 3 -  $P_3 = 200 \text{ Н}$ , його радіуси;  $r_3 = 0,1 \text{ м}$   $R_3 = 0,3 \text{ м}$ . Радіус інерції катка 3 відносно вісі  $O_1$  дорівнює  $\rho_{O_1} = 0,2 \text{ м}$ . До блоку 2, який представляє собою однорідний круглий диск, прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 3,44 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Ковзання між катком 3 і горизонтальною площиною, а також між ниткою і поверхнею блоку 2 відсутнє. Ділянка нитки  $KC$  горизонтальна. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

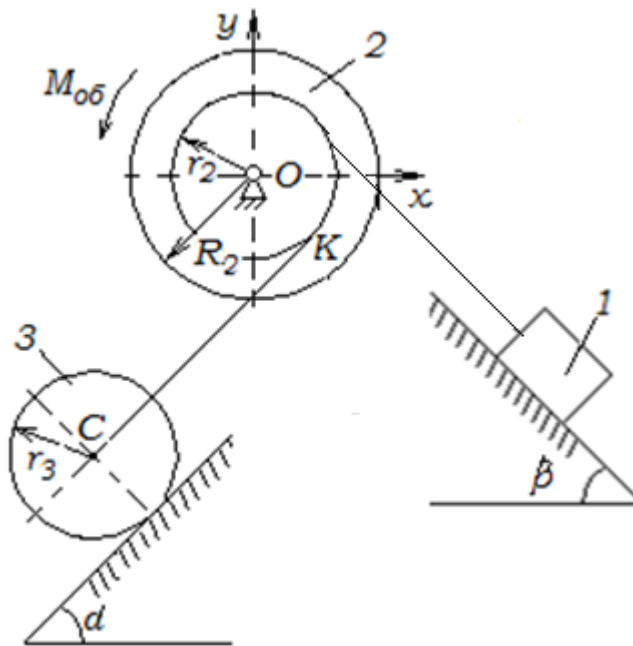


Необхідно визначити прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 23

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладений до ступінчатого блоку 2 силою тяжіння  $P_2 = 1 \text{ кН}$ , піднімає тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 2 \text{ кН}$  і приводить у рух каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 3 \text{ кН}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,6 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,3 \text{ м}$ ;  $R_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 та катка 3 відносно осей  $O$  та  $O_1$  відповідно дорівнюють -  $\rho_o = 0,5 \text{ м}$ ;  $\rho_{o1} = 0,4 \text{ м}$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та ниток по блоку 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам, з кутами нахилу до горизонту  $\alpha, \beta$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 по похилій площині дорівнює  $f = 0,1$ .



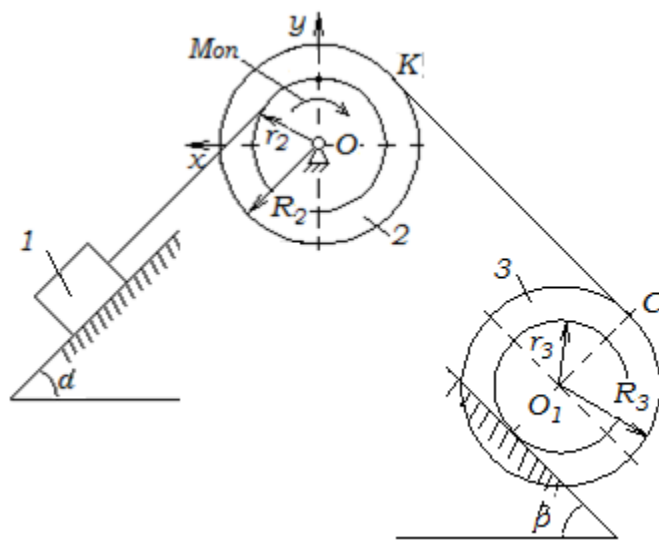
Необхідно визначити прискорення блоку 2 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 24

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 190 \text{ Н}$ , опускається до низу по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий каток 3 за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок 2. Сили тяжіння блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $P_2 = 90 \text{ Н}$ ,  $P_3 = 100 \text{ Н}$ , їх радіуси  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,5 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,15 \text{ м}$   $R_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіуси інерції ступінчатого блоку 2 та катка 3 відносно осей  $O$  та  $O_1$  відповідно дорівнюють -  $\rho_O = 0,3 \text{ м}$ ;  $\rho_{O_1} = 0,4 \text{ м}$ . На блок 2 діє постійний момент опору  $M_{on} = 5,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Поверхня по якій рухається тіло 1, похилена під кутом  $\alpha$  до горизонту, а поверхня по якій рухається каток 3 – під кутом  $\beta$ . Ковзання між катком та похилою площиною, а також між нитками і поверхнею блока 2 відсутні.

Ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .



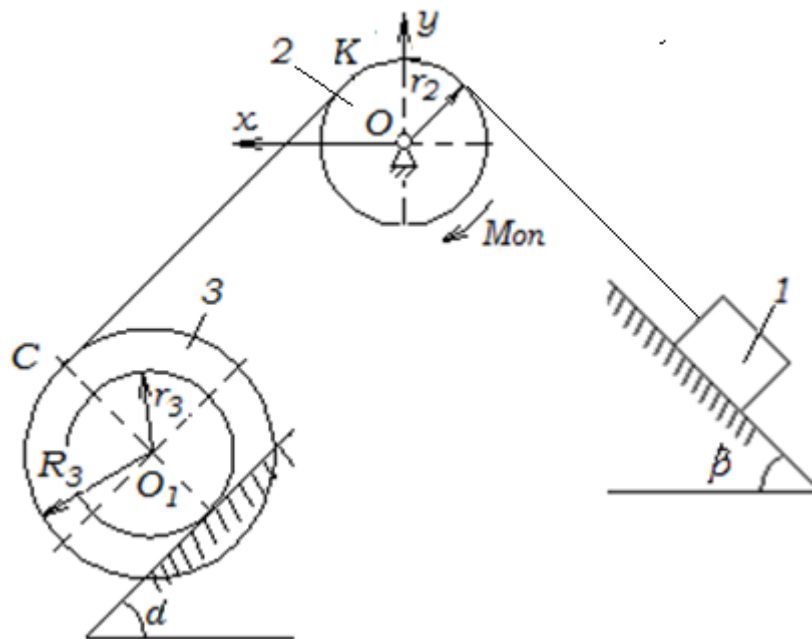
Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 25

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 450 \text{ Н}$ , опускається по похилій площині та змушує рухатись блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 80 \text{ Н}$  та каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 200 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. До блоку 2 прикладений постійний момент опору  $M_{on} = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,2 \text{ м}$ ,  $R_3 = 0,5 \text{ м}$ . Радіус інерції катка 3 відносно вісі  $O_1$  дорівнює  $\rho_{O_1} = 0,35 \text{ м}$ .

Ковзання катка 3 по поверхні, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = \beta = 30^\circ$ . Коефіцієнт тертя тіла 1 на похилу площину дорівнює  $f = 0,1$ .

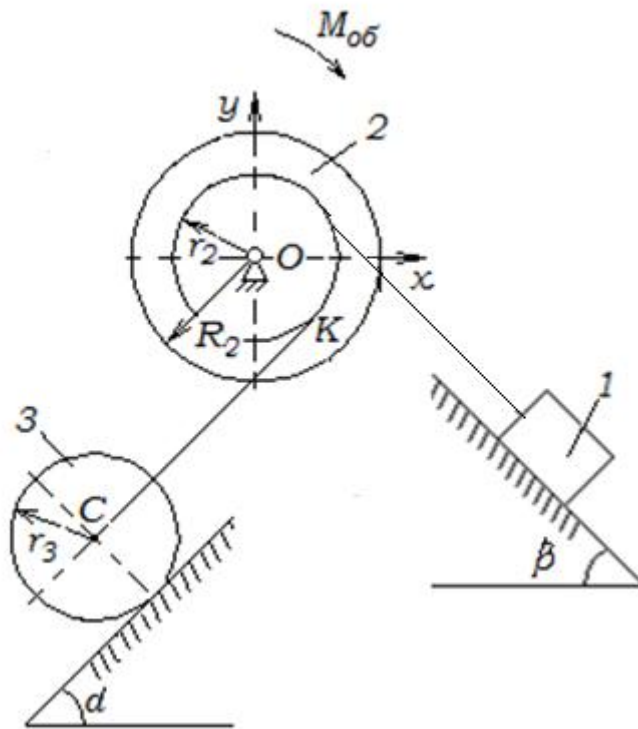


Необхідно визначити прискорення тіла 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 26

Постійний обертальний момент  $M_{об} = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , прикладений до ступінчатого блоку 2, силою тяжіння  $P_2 = 200 \text{ Н}$ , змушує рухатись тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 600 \text{ Н}$ , та каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 300 \text{ Н}$  за допомогою невагомих нерозтяжних ниток. Радіуси ступінчатого блоку 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,6 \text{ м}$ ;  $r_3 = 0,3 \text{ м}$ . Радіус інерції ступінчатого блоку 2 відносно осі  $O$  дорівнює -  $\rho_O = 0,5 \text{ м}$ . Ковзання катка 3 по похилій площині та ниток по блоку 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам, з кутами нахилу до горизонту  $\alpha$  і  $\beta$ . При розрахунках прийняти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , коефіцієнт тертя ковзання тіла 1 по похилій площині дорівнює  $f = 0,1$ .



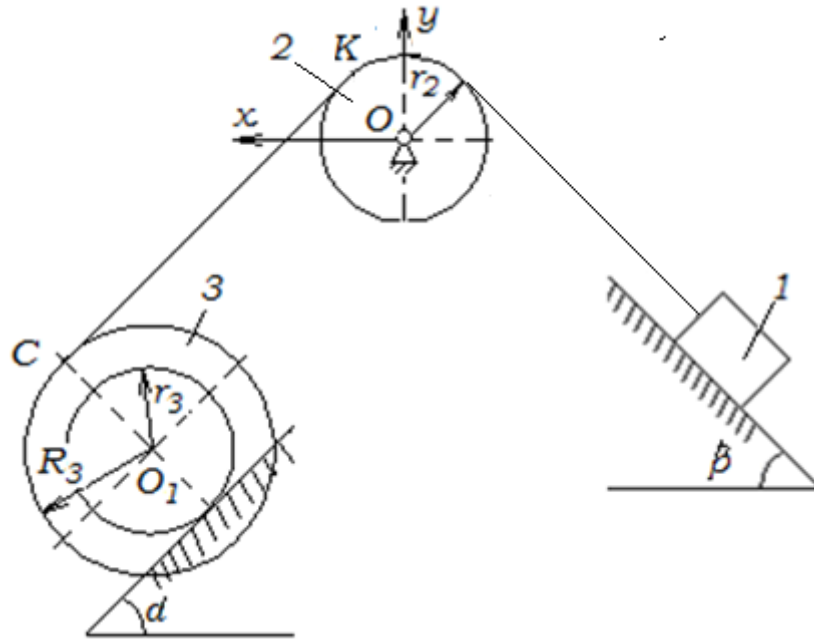
Необхідно визначити прискорення блоку 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 27

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 500$  Н, опускається по похилій площині та змушує рухатись каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 200$  Н за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, перекинутих через блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 80$  Н. Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,1$  м,  $r_3 = 0,2$  м,  $R_3 = 0,4$  м. Радіус інерції катка 3 відносно вісі  $O_1$  дорівнює  $\rho_{O_1} = 0,3$  м.

Ковзання катка 3 по поверхні, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $\alpha = \beta = 30^\circ$ . Коефіцієнт тертя тіла 1 на похилу площину дорівнює  $f = 0,1$ .



Необхідно визначити кутове прискорення тіла 2 використовуючи:

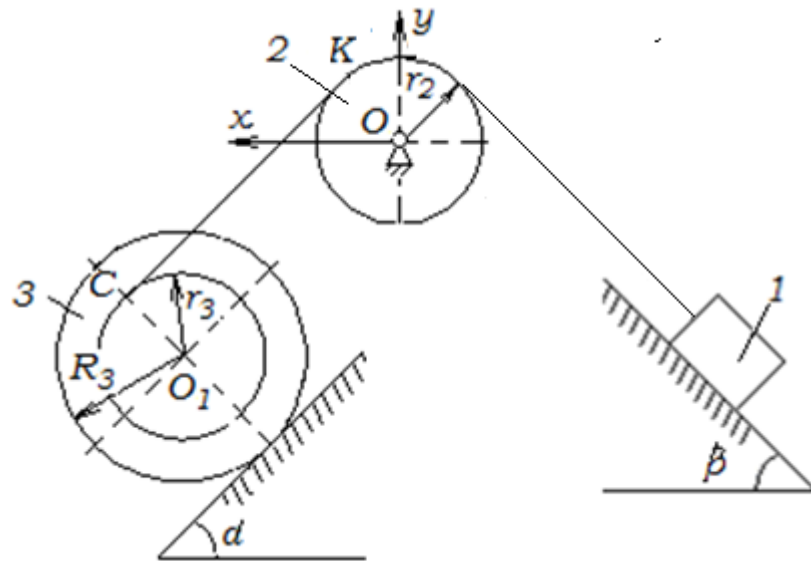
1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.

### Варіант № 28

Тіло 1 силою тяжіння  $P_1 = 500$  Н, опускається по похилій площині та змушує рухатись ступінчатий каток 3 силою тяжіння  $P_3 = 100$  Н за допомогою невагомих нерозтяжних ниток, що перекинуті через нерухомий блок 2 силою тяжіння  $P_2 = 120$  Н. Радіуси блока 2 та катка 3 відповідно дорівнюють  $r_2 = 0,2$  м,  $r_3 = 0,3$  м,  $R_3 = 0,4$  м. Радіус інерції катка 3 відносно вісі  $O_1$  дорівнює  $\rho_{O_1} = 0,35$  м.

Блок 2 вважати однорідним диском, а маса катка 3 рівномірно розподілена на його зовнішньому ободі.

Ковзання катка 3 по похилій площині, а також між ниткою і поверхнею блока 2 відсутнє. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам. При розрахунках прийняти  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .



Необхідно визначити прискорення блоку 1 використовуючи:

1. теорему про зміну кінетичної енергії;
2. принцип Д'Аламбера;
3. рівняння Лагранжа II роду.



**Додаток Д.2 Зразок оформлення титульного аркушу пояснювальної  
записки до розрахунково-графічної роботи**

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО”  
Факультет електроніки  
Кафедра акустичних та мультимедійних електронних систем

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА**

з дисципліни "Основи аналітичної механіки та теорії  
коливань"

**Виконавець:**

студент групи

\_\_\_\_\_ (прізвище, ім'я та по-батькові)

\_\_\_\_\_ (підпис)

**Перевірив:**

\_\_\_\_\_ (посада, прізвище, ім'я та по-батькові)

\_\_\_\_\_ (підпис)

Засвідчую, що у цій роботі немає  
запозичень з праць інших авторів без  
відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

(підпис)

Київ – 20\_\_